THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MAY -2022

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

THIRD SEMESTER

PART - II : MATHEMATICS

PAPER - III : ABSTRACT ALGEBRA

(Under CBCS New Regulation w.e.f. the academic year 2021-2022)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 75**

SECTION - A

విభాగము - ఎ

Answer any Five questions. Each question carries five marks. (5×5=25)

క్రింది ప్రశ్నలలో ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి. ప్రతి ప్రశ్న ఐదు మార్కులను కలిగి ఉంటుంది.

1. Prove that the set $G = \{1,3,7,9\}$ is an abelian group with respect to X_{10}.
   సమితి $G = \{1,3,7,9\}$ అనేది X_{10} దృష్ట వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.
2. Prove that cancellation laws are hold in a group.
   సమూహములో కొట్టివేత న్యాయాలు పాటించబడతాయి అని నిరూపించండి.
3. Define coset and find all cosets of the subgroup '$4\mathbb{Z}$' of the group $(\mathbb{Z},+)$
   సహ సమితిని నిర్వచించి, $(\mathbb{Z},+)$ సమూహములో ఉపసమూహము '$4\mathbb{Z}$' యొక్క సహ సమితులను కనుగొనండి.
4. Prove that the intersection of two subgroups of a group is again a subgroup of that group.
   ఒక సమూహము యొక్క రెండు ఉపసమూహాల ఛేదనము, ఆ సమూహానికి ఉపసమూహము అని నిరూపించండి.
5. If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, then find f^{2000}.

   $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ అయితే, f^{2000} ను కనుగొనండి.
6. Find all generators of the group $(Z_{12}, +_{12})$.

   $(Z_{12}, +_{12})$ సమూహము యొక్క జనకమూలకాలు కనుగొనండి.
7. Prove that $(Z_5, +_5, x_5)$ is a field.

   $(Z_5, +_5, x_5)$ క్షేత్రం అని నిరూపించండి.

8. Find the characteristic of the ring $(Z_6, +_6, x_6)$.

$(Z_6, +_6, x_6)$ వలయము లక్షణికతను కనుగొనండి.

SECTION - B

విభాగము - బి

Answer All Questions. Each question carries TEN marks. **(5×10=50)**

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్న పది మార్కులను కలిగి ఉంటుంది.

9. a) If G is a group and $a,b \in G$, then prove that $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

G ఒక సమూహము మరియు $a,b \in G$ అయితే $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that the nth roots of unity form an abelian group with respect to multiplication.

1 యొక్క n వ మూలాల సమితి గుణనం దృష్ట్యా వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

10. a) The necessary and sufficient condition for a non empty subset H of a finite group G to be a sub group of G is $ab \in H$ for all $a,b \in H$.

పరిమిత సమూహము G కి H అనేది శూన్యం కానీ ఉపసమితి H,G కి ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం ప్రతి $a, b \in H$ లకు $ab \in H$ కావలెను అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Lagrange's theorem for groups.

సమూహాల లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి, నిరూపించండి.

11. a) Let H be a subgroup of group G. Then prove that H is normal in G if and only if the product of two right cosets of H in G is also a right coset, of H in G.

H అనేది సమూహము G కి ఉపసమూహము. H,G కి అభిలంబ ఉపసమూహము మరియు H యొక్క రెండు కుడి సమితుల లబ్ధం ఒక కుడి సహసమితి అనేవి తుల్యాలు అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove fundamental theorem of Homomorphism of groups.

సమూహాల సమరూపత మూల సిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి, నిరూపించండి.

12. a) Prove that the product of two disjoint cycle's are commutative.

రెండు వియుక్త చక్రాల లబ్ధం వినియమం అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయము అని నిరూపించండి.

13. a) State and prove subring test.

ఉపసమూహ పరీక్ష వ్రాసి, నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Prove that a field has no proper ideals.

క్షేత్రానికి శుద్ధ ఆదర్శాలు లేవు అని నిరూపించండి.